Διάλεξη 11η

22/5/2019

Στατιστική Συμπερασματολογία.

- Προηγούμενο μάθημα

Στατιστικές Υποθέσεις

$H_0: \theta=\theta_0$ $H_a: \theta>\theta_0,\ \theta<\theta_0,\ \theta\neq\theta_0.$

↑ απλή

$H_0: \theta\in\Theta_0\subseteq\Theta$

↑ σύνθετη

$\boxed{\text{πχ. } \theta>5}$

Στατιστική Συνάρτηση του ΤΕΣΤ (ΣΣΤ): $T=T(x_1,\dots,x_n,\theta)$ υπό την H_0.

Κρίσιμη περιοχή (κπ): $C=\{\underline{x}: T(\underline{x},\theta)\in A\subseteq\mathbb{R}$ ή $T(\underline{x},\theta)\ \substack{\geq k\\ < k}\}$

Μηχανισμός για την λήψη Απόφασης: Αν τ.δ $X_1,\dots,X_n$ περιλαμβάνεται στην κ.π $\Longrightarrow$ Απορρ. την H_0.

Αλλιώς δεν μπορώ να απορρ H_0.

Φύση	Στατιστικός: Αποδ H_0	Απορρ H_0
H_0 αληθής	–	Σφάλμα Τύπου I.
H_a αληθής	Σφάλμα Τύπου II	–

Δύο σφάλματα στην προσπάθειά μας να πάρουμε απόφαση: Σφάλμα Τύπου I, Σφάλμα Τύπου II

$P(\text{Σφ. Τύπου I})=\alpha$

$P(\text{Σφ Τύπου II})=\beta$

Η οποία απόφαση υπέρ ή κατά της H_0 είναι αψεγάδιαστη όταν τα α και β είναι ταυτόχρονα όσο μικρότερα γίνονται.

Όμως τα α,β δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα.

(Αντιπαράδειγμα) ⊗

Σύμφωνα με την θεωρία Neyman-Pearsson κρατούμε το α όσο μικρό θέλουμε (1%, 5%, ή 10%) και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το β ή να μεγιστοποιήσουμε το $1-\beta$.

Ισχύς του Τεστ : $\gamma = 1-\beta$

$\gamma = 1-\beta = 1 - P(\Sigma\varphi$ τύπου ΙΙ$) = 1 - P($Αποδ Ηο / Ηα αληθης$)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$ $\quad P($Απορρ Ηο / Ηα αληθής$)$

Συμπερασματικά: Προσπαθούμε να βρούμε την κ.π έτσι ώστε για σταθερό και μικρό α (επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ)) το β ελαχιστοποιείται ή η ισχύς γ μεγιστοποιείται

Ισχυρότατο του (Ι) - Ομοιομόρφως Ισχυρότατου (ΟΙ) Τεστ

Ισχυρότατο Τεστ: Έστω ο έλεγχος μιας απλής Ηο έναντι μιας απλής Ηα. Ισχυρότατο τεστ με ε.σ α ονομάζεται το τεστ με τη μεγαλύτερη ισχύ μεταξύ όλων των άλλων τεστ με ίδιο ε.σ.

Ομοιομόρφως Ισχυρότατο: Έστω ο έλεγχος απλή ή σύνθετης Ηο έναντι σύνθετης Ηα. Θεωρούμε ένα τεστ για τον έλεγχο αυτό και έστω $\gamma(\theta)$ η ισχύς του ως συν/ση του θ που υπακούει στην εναλλακτική υποθ. Ηα. Το τεστ αυτό ονομάζεται Ο.Ι τεστ αν η ισχύς του $\gamma(\theta)$ είναι $\forall\,\theta$ μεγαλύτερη από την ισχύ οποιουδήποτε άλλου τεστ με ίδιο ε.σ.

Ερώτημα: Πώς κατασκευάζουμε Ι ή ΟΙ τεστ;

Απ

Θεμελιώδες Λήμμα Neymann-Pearson

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$

Έστω πρόβλημα ελέγχου απλής Ηο έναντι απλής Ηα

$H_0: \theta = \theta_0$ v $H_a: \theta = \theta_a$, $\theta_0, \theta_a \in \Theta$ γνωστά

Αν $\exists$ μια κ.π G μεγέθους α και ένας σταθερός αριθμός $k>0$ τ.ω

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_a)} \leq k \quad \forall\, \underline{x} = (x_1, \dots x_n) \in G$$

και $\dfrac{L_0}{L_a} > k \quad \forall\, x \in S-G$ τότε η G είναι η Ι κ.π μεγέθους α (ε.σ α) για τον έλεγχο της Ηο έναντι Ηα

Ισχυρ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ⓐ Ι-κπ προκύπτει για μικρές τιμές του λόγου $\frac{L_0}{L_a}$ (γιατί?)

ⓑ Το γιατί

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod f(x_i,\theta_0)}{\prod f(x_i,\theta_a)} \simeq \frac{P_{\theta_0}(x_1-\varepsilon \le X_1 \le x_1+\varepsilon, \dots, x_n-\varepsilon \le X_n \le x_n+\varepsilon)}{P_{\theta_a}(x_1-\varepsilon \le X_1 \le x_1+\varepsilon, \dots, x_n-\varepsilon \le X_n \le x_n+\varepsilon)}$$

τότε μικρές τιμές $\frac{L_0}{L_a}$ σημαίνει $P_{\theta_0} << P_{\theta_a}$ ← πιθανότητα πραγματοποίησης δείγματος υπό H_a

↑ πιθανότητα πραγματοποίησης δείγματος υπό H_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Ζ-ΤΕΣΤ)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από μια κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστή

Να κατασκευαστεί το Ιστεοτ με ε.σ α για τον έλεγχο $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a$

μ_0, μ_a γνωστά και $\mu_a > \mu_0$.

Βημα 1 $$L_0 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_0)^2}$$

$$\Rightarrow L_0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_0)^2}$$

όμοια η

$$L_a = \prod f(x_i, \theta_a) = \prod \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_a)^2}$$

$$\Rightarrow L_a = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_a)^2}$$

$$\frac{L_0}{L_a} \le k \Rightarrow \frac{\cancel{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_0)^2}}{\cancel{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_a)^2}} \le k$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum(x_i-\mu_0)^2 - \sum(x_i-\mu_a)^2\right)} \le k$$

$$\Rightarrow \sum(x_i-\mu_a)^2 - \sum(x_i-\mu_0)^2 \le 2\sigma^2 \log k$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 - 2\mu_a \sum x_i + n\cdot\mu_a^2 - \sum x_i^2 + 2\mu_0 \sum x_i - n\cdot\mu_0^2 \le 2\sigma^2 \log k$$

$$\Rightarrow (2\mu_0 - 2\mu_a)\sum x_i \le 2\sigma^2 \log k - n\mu_a^2 + n\mu_0^2$$

$$\Rightarrow n(2\mu_0 - 2\mu_a)\bar{x} \le 2\sigma^2 \log k - n\mu_a^2 + n\mu_0^2$$

$$\overset{\mu_a > \mu_0}{\Longrightarrow} \bar{x} \ge \frac{2\sigma^2 \log k - n\mu_a^2 + n\mu_0^2}{2n(\mu_0-\mu_a)} = k'$$

$\mu_0 - \mu_a < 0$ αλλάζει η ανισότητα

Άρα από Θεμ. Λήμμα N-P η Ι-κπ μεγέθους α (με ε.σ α) είναι $\bar{X} > k'$

Πρόβλημα: Δεν γνωρίζω το K'

Πως θα το βρώ? : Πάντα αξιοποιώντας την $P(\text{Σφ. τύπου I}) = \alpha$.

$$\alpha = P(\text{Σφ τύπου I}) = P(\text{Απορ } H_0 / H_0 \text{ αληθής}) = P(\bar{X} \geq K' / X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2), \forall i=1,\dots,n)$$

$$= P(\bar{X} \geq K' / \bar{X} \sim N(\mu_0, \tfrac{\sigma^2}{n}))$$

$$\Rightarrow \alpha = P(\bar{X} \geq K' / \bar{X} \sim N(\mu_0, \tfrac{\sigma^2}{n}))$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \geq \frac{K'-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{K'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} / \bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2) \right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{K'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} / Z \sim N(0,1) \right)$$

από ορισμό εκατοστιαίων σημείων $N(0,1)$

$$\frac{K'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_\alpha \Rightarrow K' = \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Συμπερασματικά: Η I-κπ μεγέθους α για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ είναι $\bar{X} \geq \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, αλλιώς για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ $(\mu_a > \mu_0)$ η ΣΣΤ είναι $\bar{X}$ με κατανομή $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ υπό H_0 και κπ μεγέθους α (με ε.σ. α) $\bar{X} \geq \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ή

για τον έλεγχο $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ η ΣΣΤ είναι $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό H_0 και Κπ μεγέθους α (με ε.σ. α) $Z \geq Z_\alpha$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ① Εφαρμογή του Θεμ. Λήμμα N-P

ΒΗΜΑΤΑ α) Ξεκινώ από $\frac{L_0}{L_a} \leq K$ και προσπαθώ να καταλήξω με πράξεις σε ένα στατιστικό (συν/ση επαρκούς) με γνωστή κατανομή υπό την H_0

β) Το κρίσιμο σημείο K (ή $K', K'' \dots$) υπολογίζεται πάντα από

$$\alpha = P(\text{Απορ. } H_0 / H_0 \text{ αληθ})$$

② Τ. I-τεστ που κατασκευάστηκε είναι γνωστό ως Z-TEST.

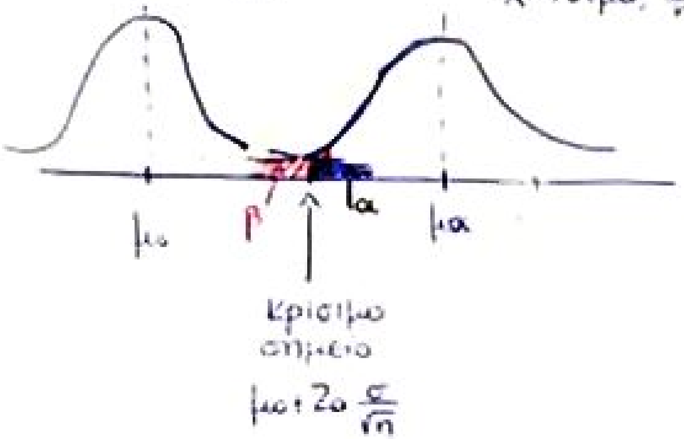
(Αντιπαράδειγμα)

Τα α, β δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα

Για τον έλεγχο της $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a: \mu = \mu_a$ ($\mu_a > \mu_0$)

το Z-τεστ είναι $\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ υπό H_0 $\qquad$ $\bar{X} \sim N(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n})$ υπό H_a



$\alpha = P(\text{Απόρρ } H_0 / H_0 \text{ αληθ})$

$= P(\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / H_0 \text{ αληθ})$

$\beta = P(\text{αποδοχή } H_0 / H_a \text{ αληθής})$

$= P(\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / H_a \text{ αληθ})$

<u>Υπολογισμός Ισχύος τα Z-τεστ</u>

$\gamma = 1-\beta = 1 - P(\text{Αποδ } H_0 / H_a \text{ αληθής})$

$= P(\text{Απόρρ } H_0 / H_a \text{ αληθ})$

$= P(\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\big|\, X_i \sim N(\mu_a, \sigma^2), i = 1, \ldots, n)$

$= P(\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / \bar{X} \sim N(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}))$

$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{(\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} / \bar{X} \sim N(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n})\right)$

$= P\left(Z \geq z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

$\Rightarrow \gamma = 1 - P\left(Z \leq z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

$= 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

σδκ της $N(0,1)$

<u>Άσκηση</u> <u>(Σπίτι)</u> Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 γνωστή. Να κατασκευάσετε το Z-τεστ με ε.σ. α για τον έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a: \mu = \mu_a$ $\mu_a < \mu_0$

μ_0, μ_a γνωστά

Έλεγχος Απλής Μηδενικής Έναντι Σύνθετης Εναλλακτικής (ΟΙ-τεστ)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$

Έστω απλή $H_0: \theta = \theta_0$ (θ_0 γνωστό) έναντι σύνθετης $H_a: \begin{cases} \theta > \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

Έστω επίσης το Ι-τεστ για τον έλεγχο της απλής $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της απλής $H_a^*: \theta = \theta_a$ με θ_a να ικανοποιεί την H_a: (δηλ $\theta_a > \theta_0$, $\theta_a < \theta_0$, $\theta_a \neq \theta_0$)

Είναι ίδιο $\forall\ \theta_a$ που ικανοποιεί την H_a ($\theta_a \in H_a$)

τότε το τεστ αυτό είναι και το ΟΙ-τεστ μεγέθους α (με ε.σ. α) για τον αρχικό έλεγχο της απλής H_0 έναντι της σύνθετης H_a

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω τ.δ $X_1, \dots X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό

Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ με ε.σ α για τον έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \mu > \mu_0$.

Λύση

Θεωρούμε τον έλεγχο της απλής προς απλή $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a^*: \mu = \mu_a$ ($\mu_a > \mu_0$)

Βρήκαμε ότι το Ι-τεστ για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_a^* έχει ΣΣΤ την $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό H_0 και κ.π μεγέθους α την $Z \geq Z_\alpha$.

Παρατηρώ ότι το Ι-τεσ δεν εξαρτάται από το μ_a

Άρα το Ι-τεστ είναι και το ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της απλής $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι σύνθετης $H_a: \mu > \mu_0$.

Άσκηση (Σπίτι)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή Εκθ(λ), $\lambda > 0$ ($f(x,\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x > 0, \lambda > 0$) Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της $H_0: \lambda = \lambda_0$ (λ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \lambda > \lambda_0$. (κατανομή του $\bar{X}$)

{Υπόδειξη (θεωρούμε $H_0: \lambda = \lambda_0$ έναντι $H_a^*: \lambda = \lambda_a$ ($\lambda_a > \lambda_0$), θα βρούμε το Ι-τεστ. ($\frac{L_0}{L_a} \leq K$)
Για τον έλεγχο H_0 έναντι H_a^* και αν αυτό είναι ανεξ του λ_a θα είναι και το ΟΙ-τεστ }